

3.3 Exercices de travaux dirigés (TD)

Exercice 3.1 Pour une certaine espèce d'insectes, on a fait les observations suivantes chez les femelles :

- Les insectes vivent au maximum trois ans.
- La moitié d'entre elles meurent à la fin de la première année de vie et parmi celles qui survivent, les $2/3$ meurent à la fin de la deuxième année de vie.
- Dans leur troisième année de vie, chaque femelle donne naissance en moyenne à 6 individus femelles de la même espèce.

L'année $2019 + n$ (avec $n \in \mathbb{N}$), on note $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$ le vecteur des nombres d'indi-

vidus respectivement dans leur première année de vie, dans leur deuxième année de vie et dans leur troisième année de vie.

- 1) Déterminez la matrice de Leslie L telle que $X_{n+1} = LX_n$.
- 2) Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer X_n en fonction de L et X_0 .
- 3) Calculer L^2 et L^3 . Que peut-on dire sur l'évolution de la population de ces insectes ?

Exercice 3.2 On considère une population de rongeurs qui ont une durée de vie de trois ans. On note respectivement x_n , y_n et z_n le nombre de femelles en première, deuxième et troisième année de vie dans l'année $2019 + n$ ($n \in \mathbb{N}$). Les femelles ne sont pas fécondes la première année et chacune des femelles en vie donne 5 femelles durant sa deuxième année et 9 durant sa troisième année. Le taux de survie est de 40 % la première année et de 65 % la deuxième année.

- 1) Etablir la matrice de Leslie M des femelles.
- 2) On suppose que la population initiale de femelles est constituée de 50 jeunes, 30 de deux ans et de 45 de trois ans. Calculer l'effectif des différentes classes d'âge de femelles au cours des deux ans à venir, ainsi que l'effectif total.

Exercice 3.3 Dans une certaine ville, le temps est soit beau (état 1), indifférent (état 2) ou mauvais (état 3). Si le temps est beau un jour donné, il y a 40% de chance qu'il soit beau le lendemain et 30% de chance qu'il soit indifférent. Si le temps est indifférent un jour donné, il a 50% de chance qu'il soit beau le lendemain et 20% de chance qu'il soit indifférent. Enfin, si le temps est mauvais un jour donné, il y a 30% de chance qu'il soit bon le lendemain et 40% qu'il soit indifférent.

- 1) Ecrire la matrice de transition P associée à cette situation.

- 2) La météo estime qu'aujourd'hui il y a 60% de chance que le temps soit indifférent et 40% qu'il pleuve. Quelles sont les chances que le temps soit beau dans 2 jours ?

Exercice 3.4 Chaque année, on estime que 15% des habitants d'une ville (état 1) se déplacent vers la banlieue environnante (état 2) et 8% de la population de la banlieue se déplace vers la ville. Actuellement, il y a au total 2 millions d'habitants dont 1.4 million en ville et 600 000 en banlieue. On suppose négligeables les décès et les naissances et que la migration se fait uniquement entre la ville et la banlieue.

- 1) Ecrire la matrice de transition P et le vecteur d'états initial $\pi^{(0)}$ de la chaîne de Markov décrivant ce modèle de migration.
- 2) Calculer la répartition attendue de la population au bout de 3 ans.